

# Limites de suites

On considère dans cette leçon deux réels  $l$  et  $l'$ .

## 1) Définition de la limite d'une suite :

### a) Suites convergentes :

**Définition** (suite convergente) : On dit qu'une suite  $(u_n)$  converge vers  $l$  si et seulement si tout intervalle ouvert contenant  $l$  contient tous les termes  $u_n$  à partir d'un certain rang.

**Remarque** : En pratique, on considère principalement les intervalles ouverts centrés en  $l$ , c'est-à-dire les intervalles de la forme  $]l - a ; l + a[$  où  $a > 0$ .

**Exemple** : On considère la suite  $(u_n)$  définie sur  $\mathbb{N}^*$  par  $u_n = \frac{1}{n}$ .

Montrons que la suite  $(u_n)$  converge vers 0.

Pour cela, on considère un intervalle ouvert centré en 0,  $I_a = ]-a ; a[$  avec  $a > 0$ .

Montrons qu'il existe un certain rang  $n_0$  à partir duquel,  $u_n \in I_a$  pour tout rang  $n \geq n_0$ .

Soit  $n_0$  un entier naturel non nul tel que  $n_0 > \frac{1}{a}$ .

Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  tel que  $n \geq n_0 > 0$ , on a alors :

$$0 < \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0}$$

Or, par définition :

$$n_0 > \frac{1}{a} \Leftrightarrow \frac{1}{n_0} < a$$

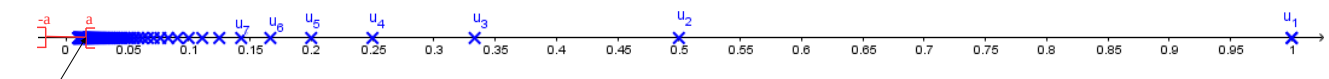
donc :

$$0 < \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} < a$$

et finalement, puisque  $-a < 0$  :

$$-a < \frac{1}{n} < a$$

Donc, à partir du rang  $n_0$ ,  $u_n \in ]-a ; a[$  et donc la suite  $(u_n)$  converge vers 0.

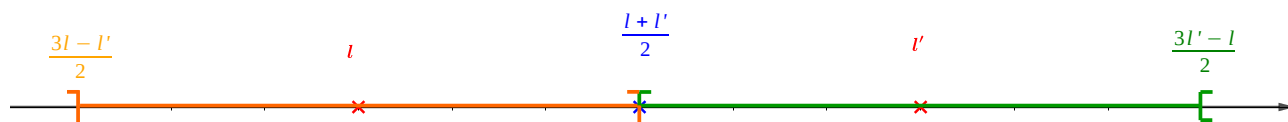


$u_{n_0}$  à partir duquel tous les termes appartiennent à  $I$

**Propriété** : si une suite  $(u_n)$  converge vers deux réels  $l$  et  $l'$ , alors  $l = l'$ .

Démonstration : Supposons qu'il existe une suite  $(u_n)$  convergente vers deux réels  $l$  et  $l'$  distincts. Sans perte de généralité, supposons que  $l' > l$ .

► On pose  $M = \frac{l' - l}{2}$  et on s'intéresse aux intervalles  $I = ]l - M ; l + M[ = \left] \frac{3l - l'}{2} ; \frac{l + l'}{2} \right[$  et  $J = ]l' - M ; l' + M[ = \left] \frac{l' + l}{2} ; \frac{3l' - l}{2} \right[$ .



On a :

- pour tout  $x \in I$ ,  $x < \frac{l + l'}{2}$
- pour tout  $x \in J$ ,  $x > \frac{l + l'}{2}$

Les intervalles  $I$  et  $J$  sont donc disjoints.

► Puisque  $(u_n)$  converge vers  $l$ , alors il existe un rang  $n_0$  tel que :

$$\text{pour tout } n \geq n_0, u_n \in I$$

► Puisque  $(u_n)$  converge vers  $l'$ , alors il existe un rang  $n_1$  tel que :

$$\text{pour tout } n \geq n_1, u_n \in J$$

► Ainsi, si on pose  $m = \max(n_0 ; n_1)$ , le plus grand rang entre  $n_0$  et  $n_1$ , alors :

$$\text{pour tout } n \geq m, u_n \in I \text{ et } u_n \in J$$

c'est-à-dire :

$$\text{pour tout } n \geq m, u_n \in I \cap J$$

Absurde puisqu'on a vu que  $I \cap J = \emptyset$ .

Donc, si une suite converge vers deux réels  $l$  et  $l'$ , alors nécessairement  $l = l'$ .

Définition : Lorsqu'une suite  $(u_n)$  converge vers un réel  $l$ , on appelle ce réel la limite de la suite et on le note :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$$

Exemple : On a prouvé précédemment que la suite  $(u_n)$  définie sur  $\mathbb{N}^*$  par  $u_n = \frac{1}{n}$  avait pour

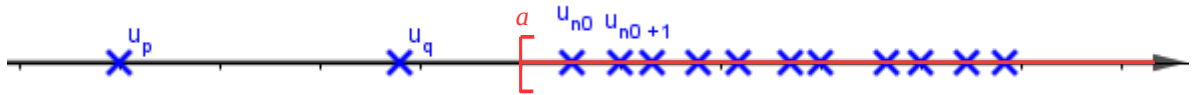
limite 0 et on le note  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$ .

## b) Suites divergentes :

### Définitions :

- On dit qu'une suite  $(u_n)$  a pour limite (ou tend vers)  $+\infty$  si et seulement si pour tout réel  $a$  tout intervalle de la forme  $]a; +\infty[$  contient tous les termes  $u_n$  à partir d'un certain rang. Cela se note :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$$



- On dit qu'une suite  $(u_n)$  a pour limite (ou tend vers)  $-\infty$  si et seulement si pour tout réel  $a$  tout intervalle de la forme  $]-\infty; a[$  contient tous les termes  $u_n$  à partir d'un certain rang. Cela se note :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$$

### Exemples :

- On considère la suite  $(u_n)$  définie sur  $\mathbb{N}$  par  $u_n = n$ . Montrons que la suite  $(u_n)$  tend vers  $+\infty$ .

Pour cela, on considère un intervalle de la forme,  $I_a = ]a; +\infty[$  avec  $a \in \mathbb{R}$ .

On pose  $n_0 = a + 1$ .

Pour tout  $n \geq n_0$ , on a donc :  $n \geq a + 1 > a$ , soit  $u_n > a$ .

Ainsi, à partir du rang  $n_0 = a + 1$ ,  $u_n \in ]a; +\infty[$  et donc la suite  $(u_n)$  tend vers  $+\infty$ .

On a ainsi prouvé que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty$ .

- De la même manière, on peut prouver que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} -n = -\infty$ .

**Définition** (suite divergente) : On appelle suite divergente toute suite qui ne converge pas.

### Exemples :

- on a vu que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty$ , donc la suite  $(u_n)$  définie sur  $\mathbb{N}$  par  $u_n = n$  est divergente.
- on a vu que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} -n = -\infty$ , donc la suite  $(v_n)$  définie sur  $\mathbb{N}$  par  $v_n = -n$  est divergente.
- la suite définie sur  $\mathbb{N}$  par  $w_n = (-1)^n$  ne possède pas limite, donc est divergente.

## c) Quelques limites de suites classiques :

### Propriété (admise) :

- La suite de terme général  $\sqrt{n}$  diverge et a pour limite  $+\infty$
- Pour tout  $p$  entier strictement positif, la suite de terme général  $n^p$  diverge et a pour limite  $+\infty$

- La suite de terme général  $\frac{1}{\sqrt{n}}$  converge vers 0
- Pour tout  $p$  entier strictement positif, la suite de terme général  $\frac{1}{n^p}$  converge vers 0
- Toute suite constante converge vers cette constante.

Exemples :

- la suite définie sur  $\mathbb{N}$  par  $u_n = n^3$  est divergente et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^3 = +\infty$
- la suite définie sur  $\mathbb{N}^*$  par  $v_n = \frac{1}{n^5}$  est convergente et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^5} = 0$
- la suite définie sur  $\mathbb{N}$  par  $u_n = \pi$  est convergente et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \pi = \pi$

## 2) Opérations sur les limites de suites :

Soit deux suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$ .

On va étudier les limites éventuelles des suites  $(u_n + v_n)$ ,  $(u_n \times v_n)$  et  $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$  lorsque  $v_n \neq 0$  pour tout rang  $n$  de l'ensemble de définition de  $(v_n)$ .

Lorsqu'il ne sera pas possible de déterminer ces limites à l'aide de ces théorèmes, on dira qu'on a une forme indéterminée, notée F.I par la suite.

### a) Limite d'une somme de suites :

Propriété (admise) :

Lorsque $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n =$	$l$	$l$	$l$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
et $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n =$	$l'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n + v_n) =$	$l + l'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	F.I

Exemples :

- on a  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^3 = +\infty$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} -2 = -2$ , donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^3 - 2 = +\infty$
- on a  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} -n = -\infty$ , donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} - n = -\infty$
- on a  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 = +\infty$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty$ , donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 + n = +\infty$
- on a  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 = +\infty$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} -n = -\infty$ , donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 - n$  est une forme indéterminée, il faut l'étudier plus finement.

## b) Limite d'un produit de suites :

Propriété (admise) :

Lorsque $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n =$	$l$	$l > 0$ ou $+\infty$	$l < 0$ ou $-\infty$	$l > 0$ ou $+\infty$	$l < 0$ ou $-\infty$	0
et $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n =$	$l'$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$ ou $+\infty$
alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n \times v_n) =$	$l \times l'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	F.I

Exemples :

- on a  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^3 = +\infty$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} 5 = 5$ , donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} 5n^3 = +\infty$
- on a  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} -\sqrt{n} = -\infty$ , donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n \times (-\sqrt{n}) = -\infty$
- on a  $\lim_{n \rightarrow +\infty} 5 = 5$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} - 4 = -4$ , donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} 5 \left( \frac{1}{n} - 4 \right) = 5 \times (-4) = -20$
- Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on a  $n^2 - n = n^2 \left( 1 - \frac{1}{n} \right)$ .

Or :

►  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 = +\infty$

►  $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1 - \frac{1}{n} = 1$

donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 - n = \lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 \left( 1 - \frac{1}{n} \right) = +\infty$  (on a levé l'indétermination précédente).

- on a  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n+1)^2 = +\infty$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$ , donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n+1)^2 \times \frac{1}{n}$  est une forme indéterminée, il faut l'étudier plus finement.

## c) Limite d'un quotient de suites :

Propriété (admise) :

► 1<sup>er</sup> cas : la suite  $(u_n)$  converge

Lorsque $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n =$	$l$	$l$	$l > 0$	$l > 0$	$l < 0$	$l < 0$	0
et $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n =$	$l' \neq 0$	$+\infty$ ou $-\infty$	0 et $v_n > 0$	0 et $v_n < 0$	0 et $v_n > 0$	0 et $v_n < 0$	0
alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{u_n}{v_n} \right) =$	$\frac{l}{l'}$	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	F.I

► 2ème cas : la suite  $(u_n)$  a pour limite  $+\infty$  ou  $-\infty$

Lorsque $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n =$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$
et $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n =$	$l' > 0$	$l' < 0$	$l' > 0$	$l' < 0$	$+\infty$ ou $-\infty$
alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{u_n}{v_n} \right) =$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	<b>F.I</b>

Exemples :

- on a  $\lim_{n \rightarrow +\infty} 7 = 7$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 = +\infty$ , donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{7}{n^2} = 0$

- on a  $\lim_{n \rightarrow +\infty} -3 = -3$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$ .

De plus, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$   $\frac{1}{n} > 0$ , donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-3}{\frac{1}{n}} = -\infty$

- on a  $\lim_{n \rightarrow +\infty} -n^2 = -\infty$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} -2 = -2$ , donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-n^2}{-2} = +\infty$

- Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , l'expression  $\frac{(n+1)^2}{n}$  se réécrit :

$$\frac{(n+1)^2}{n} = \frac{n^2 + 2n + 1}{n} = n + 2 + \frac{1}{n}$$

Or :

►  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty$

►  $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2 + \frac{1}{n} = 2$

donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(n+1)^2}{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} n + 2 + \frac{1}{n} = +\infty$  (on a levé l'indétermination précédente).

### 3) Théorèmes de comparaison :

Propriété (admise) : Soit  $(u_n)$  et  $(v_n)$  deux suites telles que  $u_n \leq v_n$  à partir d'un certain rang.

Si  $u_n$  converge vers un réel  $l$  et  $v_n$  converge vers un réel  $l'$ , alors  $l \leq l'$ .

Cas particulier : Si une suite  $(u_n)$  converge vers un réel  $l$  et qu'il existe un réel  $M$  tel que  $u_n \leq M$  à partir d'un certain rang, alors  $l \leq M$ .

Exemple d'utilisation : On considère la suite  $(u_n)$  définie par  $u_0 = 0$  et, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_{n+1} = \frac{u_n}{2} + 1$ . Montrons que  $(u_n)$  est majorée par 2.

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on considère la propriété  $P(n)$  :  $u_n \leq 2$ .

Initialisation : Montrons que  $P(0)$  est vraie.

On a  $u_0 = 0$  et  $0 \leq 2$ , donc  $P(0)$  est vraie.

Hérédité : Soit  $k$  un entier positif.

On suppose que  $P(k)$  est vraie, soit  $u_k \leq 2$ .

Montrons qu'alors  $P(k+1)$  est vraie, soit  $u_{k+1} \leq 2$ .

Par définition de  $(u_n)$ , on a :

$$u_{k+1} = \frac{u_k}{2} + 1$$

Or,

$$u_k \leq 2 \Leftrightarrow \frac{u_k}{2} \leq 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{u_k}{2} + 1 \leq 2$$

$$\Leftrightarrow u_{k+1} \leq 2$$

Ainsi, si  $P(k)$  est vraie, alors  $P(k+1)$  l'est aussi et la propriété est héréditaire.

Conclusion : La propriété est vraie au rang 0 et est héréditaire, par récurrence on obtient donc :

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, u_n \leq 2$$

La suite  $(u_n)$  est donc majorée par 2.

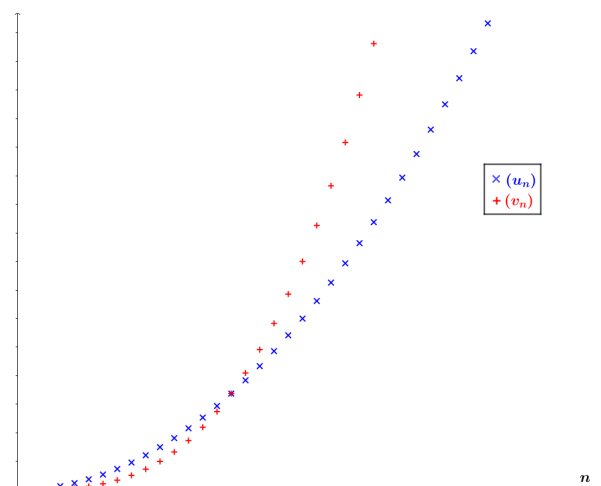
On en déduit que, si  $(u_n)$  converge vers un réel  $l$ , alors  $l \leq 2$ .

Propriété : Soit  $(u_n)$  et  $(v_n)$  deux suites telles que  $u_n \leq v_n$  à partir d'un certain rang.

$$\text{Si } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty, \text{ alors } \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty.$$

Démonstration : Soit deux suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$  telles que :

- il existe un rang  $n_0$  tel que :  
pour tout  $n \geq n_0$ ,  $u_n \leq v_n$
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$



Soit  $a \in \mathbb{R}$ , on considère l'intervalle  $I_a = [a ; +\infty[$ .

Puisque  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ , alors il existe un rang  $n_1$  tel que :

$$\text{pour tout } n \geq n_1, \quad a \leq u_n, \text{ soit } u_n \in I_a$$

On pose  $N = \max(n_0 ; n_1)$ , on alors :

$$\text{pour tout } n \geq N, \quad a \leq u_n \text{ et } u_n \leq v_n$$

On en déduit que :

$$\text{pour tout } n \geq N, \quad a \leq v_n$$

Ainsi, pour tout  $a \in \mathbb{R}$ , il existe un rang  $N$  à partir duquel  $v_n \in I_a$  et donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$ .

Propriété (admise) : Soit  $(u_n)$  et  $(v_n)$  deux suites telles que  $u_n \leq v_n$  à partir d'un certain rang.

$$\text{Si } \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty, \text{ alors } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty.$$

Exemple d'utilisation : Déterminer la limite de la suite définie sur  $\mathbb{N}$  par  $u_n = n^2 + (-1)^n$ .

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a  $-1 \leq (-1)^n \Leftrightarrow n^2 - 1 \leq n^2 + (-1)^n$ , donc  $n^2 - 1 \leq u_n$ .

Or :

- $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 = +\infty$
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} -1 = -1$

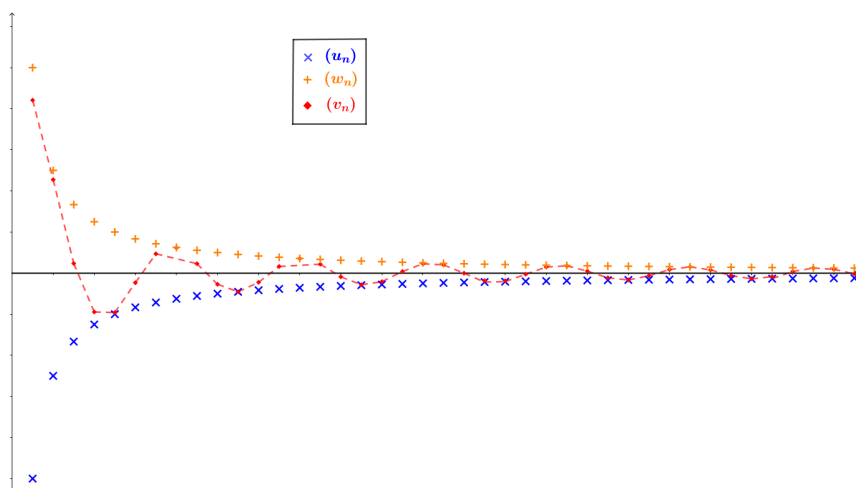
Donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 - 1 = +\infty$  et par comparaison, la suite  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ .

La suite  $(u_n)$  diverge vers  $+\infty$ .

Théorème des gendarmes (admis) :

Soit  $(u_n)$ ,  $(v_n)$  et  $(w_n)$  trois suites telles que  $u_n \leq v_n \leq w_n$  à partir d'un certain rang.

S'il existe un réel  $l$  tel que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = l$ , alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = l$ .





Exemple d'utilisation : Déterminer la limite de la suite définie sur  $\mathbb{N}^*$  par  $u_n = \frac{\sin(n)}{n}$  .

Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  , on a  $-1 \leq \sin(n) \leq 1 \Leftrightarrow -\frac{1}{n} \leq \frac{\sin(n)}{n} \leq \frac{1}{n}$  , car  $n > 0$  ,

donc  $-\frac{1}{n} \leq u_n \leq \frac{1}{n}$  .

Or :

- $\lim_{n \rightarrow +\infty} -\frac{1}{n} = 0$
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$

Par le théorème des gendarmes, on a donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$  .

Application : comportement à l'infini des suites géométriques de la forme  $(q^n)$

Soit  $q$  un réel :

- si  $q > 1$  , la suite  $(q^n)$  diverge vers  $+\infty$
- si  $q = 1$  , la suite  $(q^n)$  est constante et donc converge vers 1
- si  $-1 < q < 1$  , alors la suite  $(q^n)$  converge vers 0

Remarque : si  $q \leq -1$  , alors la suite  $(q^n)$  diverge et ne possède pas de limite.

Démonstration :

- **cas**  $q > 1$

Rappel : on a démontré précédemment, l'inégalité de Bernoulli :

pour tout réel  $x$  strictement positif et pour tout  $n \in \mathbb{N}$  , on a  $(1+x)^n \geq 1+nx$

Puisque  $q > 1$  , alors il existe un réel  $x > 0$  tel que  $q = 1+x$  .

D'après l'inégalité de Bernoulli, on a alors, pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :  $(1+x)^n \geq 1+nx$   
soit  $q^n \geq 1+nx$  .

Or, puisque  $x > 0$  ,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} nx = +\infty$  et donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1+nx = +\infty$  .

Par comparaison, on obtient donc :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = +\infty$$

- **cas**  $0 < q < 1$

On pose  $a = \frac{1}{q}$  . Puisque  $0 < q < 1$  , alors  $a > 1$  et donc le cas précédent s'applique et  $(a^n)$  diverge vers  $+\infty$  .

On en déduit que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{a^n} = 0$

Finalement  $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{a^n} = 0$  .

- **cas**  $-1 < q < 0$

On pose  $a = -q$  . Puisque  $-1 < q < 0$  , alors  $1 > -q > 0$  et donc  $1 > a > 0$  .

On retrouve le cas précédent et donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a^n = 0$

Or,  $a = -q$  , soit  $q = -a$  et donc, pour tout  $n \in \mathbb{N}$  ,  $q^n = (-a)^n$  .

Finalement, on a :

$$-a^n \leq q^n \leq a^n$$

et puisque  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a^n = \lim_{n \rightarrow +\infty} -a^n = 0$  , le théorème des gendarmes nous assure que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0$  .

- **cas**  $q = 0$  ou  $q = 1$

Dans ce cas, la suite  $(q^n)$  est constante (pour tout  $n \in \mathbb{N}$  ,  $q^n = q$  ) et converge donc vers cette constante.

#### Exemples d'utilisation :

- la suite  $(u_n)$  définie sur  $\mathbb{N}$  par  $u_n = 2^n$  est de la forme  $(q^n)$  avec  $q = 2 > 1$  .  
Donc  $(u_n)$  diverge vers  $+\infty$  .
- la suite  $(v_n)$  définie sur  $\mathbb{N}$  par  $v_n = (-0,5)^n$  est de la forme  $(q^n)$  avec  $-1 < q < 1$  .  
Donc  $(v_n)$  converge vers  $0$  .
- la suite  $(w_n)$  définie sur  $\mathbb{N}$  par  $w_n = (-3)^n$  est de la forme  $(q^n)$  avec  $q < -1$  .  
Donc  $(w_n)$  diverge et n'a pas de limite.

#### **4) Convergence et monotonie :**

Propriété : Soit  $(u_n)$  une suite croissante.

Si  $(u_n)$  converge vers une limite  $l$  , alors  $(u_n)$  est majorée par  $l$  .

Démonstration : Soit  $(u_n)$  une suite croissante, convergeant vers une limite  $l$  .  
Supposons que  $l$  ne soit pas un majorant de  $(u_n)$  .

Alors, il existe un entier  $n_0$  tel que  $u_{n_0} > l$  .

On pose  $M = u_{n_0} - l$  .

Par définition  $M > 0$  et on a  $u_{n_0} = M + l$  .

Or, la suite  $(u_n)$  est croissante, donc pour tout rang  $n \geq n_0$ ,  $u_n \geq u_{n_0} \geq M + l$ .

L'intervalle  $I = ]l - M ; l + M[$  est un intervalle ouvert qui contient  $l$ , mais qui ne contient aucun terme de la suite à partir du rang  $n_0$ .

Absurde, car  $(u_n)$  converge vers  $l$ . Le réel  $l$  est donc un majorant de  $(u_n)$ .

Exemple d'utilisation : Déterminer un majorant de la suite définie sur  $\mathbb{N}^*$  par  $u_n = 2 - \frac{1}{n}$ .

- On calcule :

$$u_{n+1} - u_n = 2 - \frac{1}{n+1} - 2 + \frac{1}{n} = \frac{n+1-n}{n(n+1)} = \frac{1}{n(n+1)} > 0$$

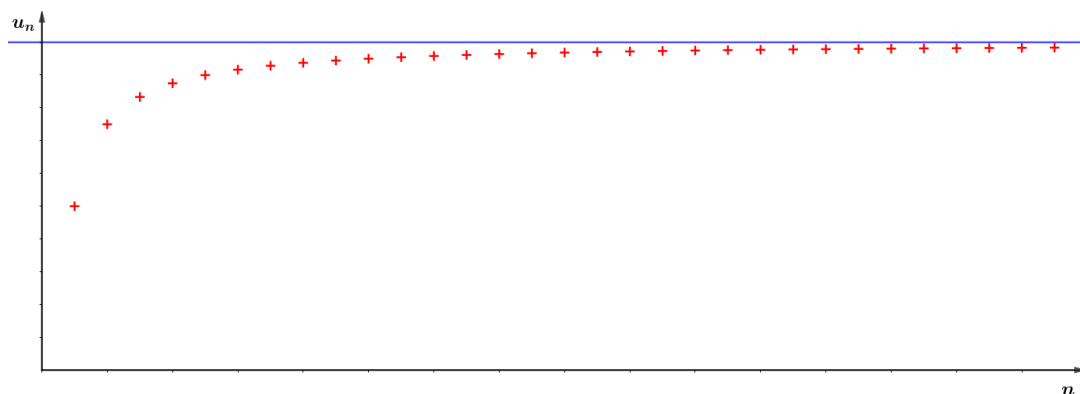
Donc la suite  $(u_n)$  est strictement croissante.

- On a  $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2 = 2$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-1}{n} = 0$ , donc, par somme,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 2$ .

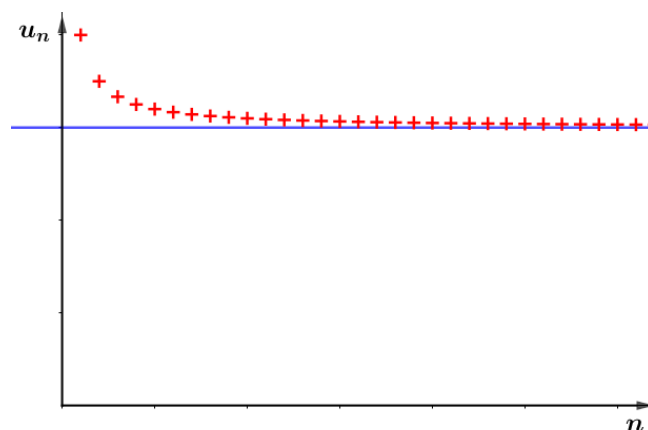
La suite  $(u_n)$  est donc croissante et converge vers 2, elle admet donc 2 comme majorant.

Théorèmes de convergence monotone (admis) :

- Si une suite est croissante et majorée, alors elle est convergente.



- Si une suite est décroissante et minorée, alors elle est convergente.



Remarque : les théorèmes de convergence monotone permettent de prouver qu'une suite converge, mais ne donne aucune indication sur la limite de la suite.

Exemple d'utilisation :

On considère la suite  $(u_n)$  définie par  $u_0 = 0$  et, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_{n+1} = \frac{u_n}{2} + 1$ .

On a prouvé que cette suite était majorée par 2.

- 1) Prouver que la suite  $(u_n)$  est croissante.
  - 2) En déduire que la suite  $(u_n)$  est convergente.
- 

1) Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{u_n}{2} + 1 - u_n \\ &= 1 - \frac{u_n}{2} \end{aligned}$$

Or, pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :

$$\begin{aligned} u_n \leq 2 &\Leftrightarrow \frac{u_n}{2} \leq 1 \\ &\Leftrightarrow -\frac{u_n}{2} \geq -1 \\ &\Leftrightarrow 1 - \frac{u_n}{2} \geq 0 \end{aligned}$$

et finalement, pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :

$$u_{n+1} - u_n \geq 0 \Leftrightarrow u_{n+1} \geq u_n$$

La suite  $(u_n)$  est donc croissante.

- 2) La suite  $(u_n)$  est croissante et majorée, donc par le théorème de convergence monotone, elle est convergente.

Déterminer la limite de la suite précédente :

On pose  $l = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ .

On a alors :

- $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = l$
- Puisque, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_{n+1} = \frac{u_n}{2} + 1$  alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{2} + 1 = \frac{l}{2} + 1$

Par unicité de la limite,  $l$  vérifie donc l'équation :

$$l = \frac{l}{2} + 1$$

Soit :

$$l - \frac{l}{2} = 1 \Leftrightarrow \frac{l}{2} = 1$$

$$\Leftrightarrow l = 2$$

La suite  $(u_n)$  converge donc vers 2.

Propriété : Toute suite croissante non majorée diverge vers  $+\infty$ .

Démonstration : Soit  $(u_n)$  une suite croissante, non majorée et soit  $a$  un réel.

On considère l'intervalle  $I_a = [a ; +\infty[$ .

Puisque  $(u_n)$  n'est pas majorée, il existe un rang  $n_0$  tel que  $u_{n_0} > a$  (sinon  $a$  serait un majorant de la suite  $(u_n)$ ).

Par croissance de la suite  $(u_n)$ , pour tout  $n \geq n_0$   $u_n \geq u_{n_0} > a$  et donc :

$$\text{pour tout } n \geq n_0, u_n \in I_a$$

Pour tout réel  $a$ , il existe donc un rang  $n_0$  tel que tous les termes de la suite appartiennent à  $I_a$  à partir de ce rang. Autrement dit,  $(u_n)$  diverge vers  $+\infty$ .